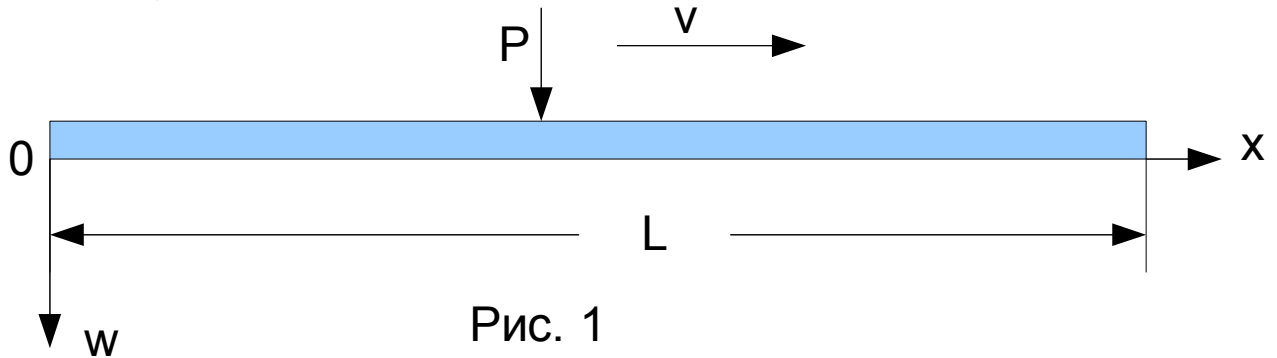


## Расчёт балки на упругом основании, по которой движется сосредоточенная нагрузка

Рассмотрим балку, лежащую на упругом основании винклеровского типа, на которую воздействует сосредоточенная нагрузка, движущаяся с постоянной скоростью вдоль оси балки. Расчётная схема и принятые обозначения показаны на рис.1.



В соответствии с расчётной схемой дифференциальное уравнение для прогибов балки  $w(x)$  будет иметь вид:

$$EJ \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + cbw(x,t) = P \delta(x-tv) \dots \dots \dots (1)$$

Здесь:  $EJ$  — жёсткость балки (произведение модуля упругости материала балки на момент инерции её поперечного сечения).

$m$  — погонная масса балки (масса единицы длины балки),

$c$  — коэффициент постели для упругого основания,

$b$  — ширина балки,

,  $\delta$  — функция Дирака (здесь  $\delta$  имеет размерность 1/м)

$t$  — время.

Остальные обозначения показаны на рис.1.

Выполним в (1) преобразование Лапласа дважды (по переменным  $x$  и  $t$ ). В пространстве образов Лапласа переменной  $t$  соответствует  $s$ , а переменной  $x$  соответственно —  $r$ . Однократное преобразование для  $w$  обозначаем точкой сверху. Выразив из полученного уравнения значение для  $w$ , получим:

$$\dot{w}(r, s) = \frac{1}{EJv} P \frac{1}{(r^4 + a^4)(r + d)} + \frac{r^3}{(r^4 + a^4)} \dot{w}(0, s) + \frac{r^2}{(r^4 + a^4)} \frac{\partial \dot{w}(0, s)}{\partial x} \dots \dots \dots (2)$$

Эта удивительно простая формула даёт решение задачи в образах преобразования Лапласа. К сожалению, при переходе к оригиналам простота пропадает и возникают существенные трудности. Однако, продолжим.

В формуле (2) введены обозначения:

$$a^4 = \frac{(ms^2 + cb)}{EJ} \dots\dots\dots (3)$$

$$d = \frac{S}{v} \dots\dots\dots (4)$$

Выполним в (2) обратное преобразование Лапласа. Поскольку имеем одни только рациональные дроби, обратное преобразование можно выполнить аналитически (интегрированием в комплексной области с помощью вычетов или по готовым таблицам). В результате получим формулу (5), в которой для удобства также введены несколько промежуточных обозначений.

$$\dot{w}(x, s) = \frac{1}{EJv} \frac{P}{a^4 + d^4} \left\{ \frac{1}{4\alpha^3} [-4\alpha^3 F_4 + (2\alpha^2 d - d^3) F_3 + (2\alpha^2 d + d^3) F_2 - 2\alpha d^2 F_1] + \exp(-dx) \right\} \\ + \dot{w}(0, s) F_4 + \frac{1}{2\alpha} (F_2 + F_3) \frac{\partial \dot{w}(0, s)}{\partial x} \dots\dots\dots (5)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$F_1 = \sin(\alpha x) sh(\alpha x)$$

$$F_2 = \sin(\alpha x) ch(\alpha x)$$

$$F_3 = \cos(\alpha x) sh(\alpha x)$$

$$F_4 = \cos(\alpha x) ch(\alpha x)$$

Для нахождения двух граничных величин, входящих в (5), используем условия на правом конце балки ( $x=L$ ). Для свободного конца будем иметь:

$$\frac{\partial^2 \dot{w}(L, s)}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 \dot{w}(L, s)}{\partial x^3} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

Чтобы воспользоваться равенствами (6), надо иметь вторую и третью производные от  $\dot{w}(x, s)$ . Дифференцирование в (5) не представляет труда, поскольку функции F (их ещё называют в литературе балочными функциями) при дифференцировании просто переходят друг в друга. Выпишем нужные нам соотношения:

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} = 2\alpha^2 F_4 \dots\dots \frac{\partial^3 F_1}{\partial x^3} = 2\alpha^3 (F_3 - F_2) \dots\dots\dots (7)$$

$$\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2} = 2\alpha^2 F_3 \dots \dots \frac{\partial^3 F_2}{\partial x^3} = 2\alpha^3 (F_4 - F_1) \dots \dots \dots (8)$$

$$\frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} = -2\alpha^2 F_2 \dots \dots \frac{\partial^3 F_3}{\partial x^3} = -2\alpha^3 (F_4 + F_1) \dots \dots \dots (9)$$

$$\frac{\partial^2 F_4}{\partial x^2} = -2\alpha^2 F_1 \dots \dots \frac{\partial^3 F_4}{\partial x^3} = -2\alpha^3 (F_3 + F_2) \dots \dots \dots (10)$$

$$\frac{\partial^2 \exp(-dx)}{\partial x^2} = d^2 \exp(-dx) \dots \dots \frac{\partial^3 \exp(-dx)}{\partial x^3} = -d^3 \exp(-dx) \dots \dots \dots (11)$$

(здесь  $d = s/v$ , а не знак дифференциала)

Я думаю, что нет необходимости явно выписывать выражения для второй и третьей производной от  $\dot{w}(x, s)$ , их легко получить подстановкой формул (7)-(11) на соответствующие места.

Таким образом, с помощью равенств (6) получаем возможность написать систему двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными и в результате найти  $\dot{w}(0, s) \dots u \dots \frac{\partial \dot{w}(0, s)}{\partial x}$ . В итоге имеем возможность вычислить осадку балки, а также изгибающие моменты и поперечные силы (умножая вторую и третью производные на  $EJ$ ) в пространстве образов Лапласа. К большому сожалению, выполнить обратное преобразование Лапласа по переменной  $t$  аналитически, конечно, нет никакой возможности. Но у нас есть методика и программа для выполнения этого преобразования численно и, значит, можем вычислить осадку, изгибающие моменты и поперечные силы в любой точке балки и в любой момент времени.

Расчёты выполнены при следующих исходных данных:  $L=5\text{м}$ ,  $b=1\text{м}$ ,  $EJ=300000\text{кГм}^2$ ,  $c=100000\text{кГ/м}^3$ ,  $m=100\text{кГсек}^2/\text{м}^2$ ,  $v=20\text{м/сек}$ ,  $P=2000\text{кГ}$ . На рис.2 показаны осадки балки (для наглядности изменён знак) в точках приложения подвижной силы (при  $x=vt$ ), а на рис.3 — изгибающие моменты в этих же точках. Несимметричность этих графиков относительно средней точки характеризует степень влияния подвижности нагрузки на результаты расчётов. Интересно, что в начальный момент на некотором участке изгибающие моменты могут быть даже противоположными по знаку моментам, возникающим в точке приложения силы в статических условиях, рис 3. На рис.4 приведена эпюра осадок балки для момента расположения нагрузки в средней точке ( $x=L/2$ ). Соответственно, эта эпюра также очень несимметрична.

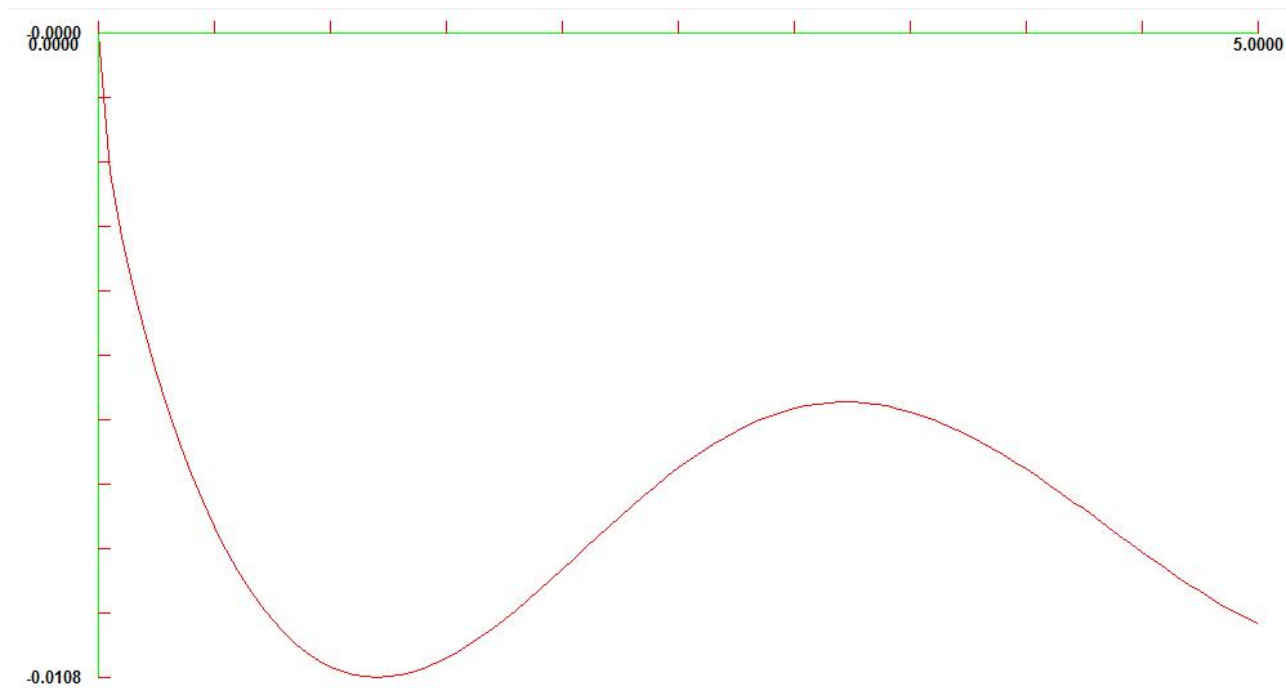


Рис.2

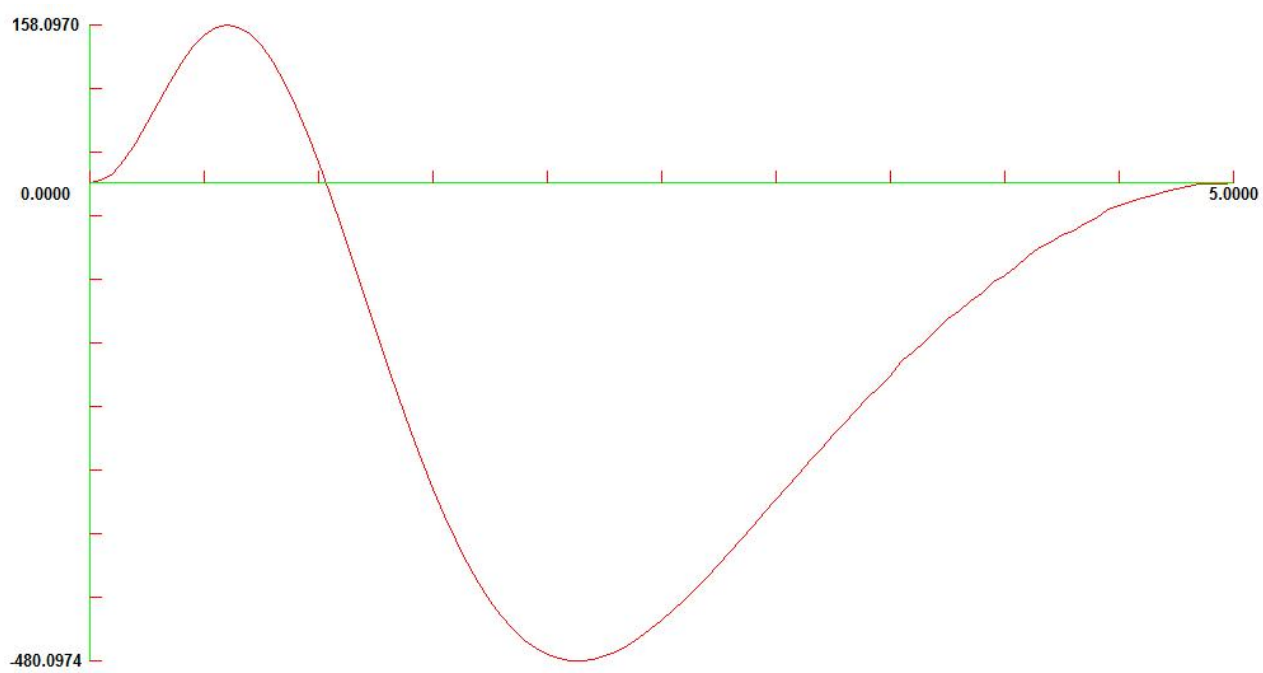


Рис.3

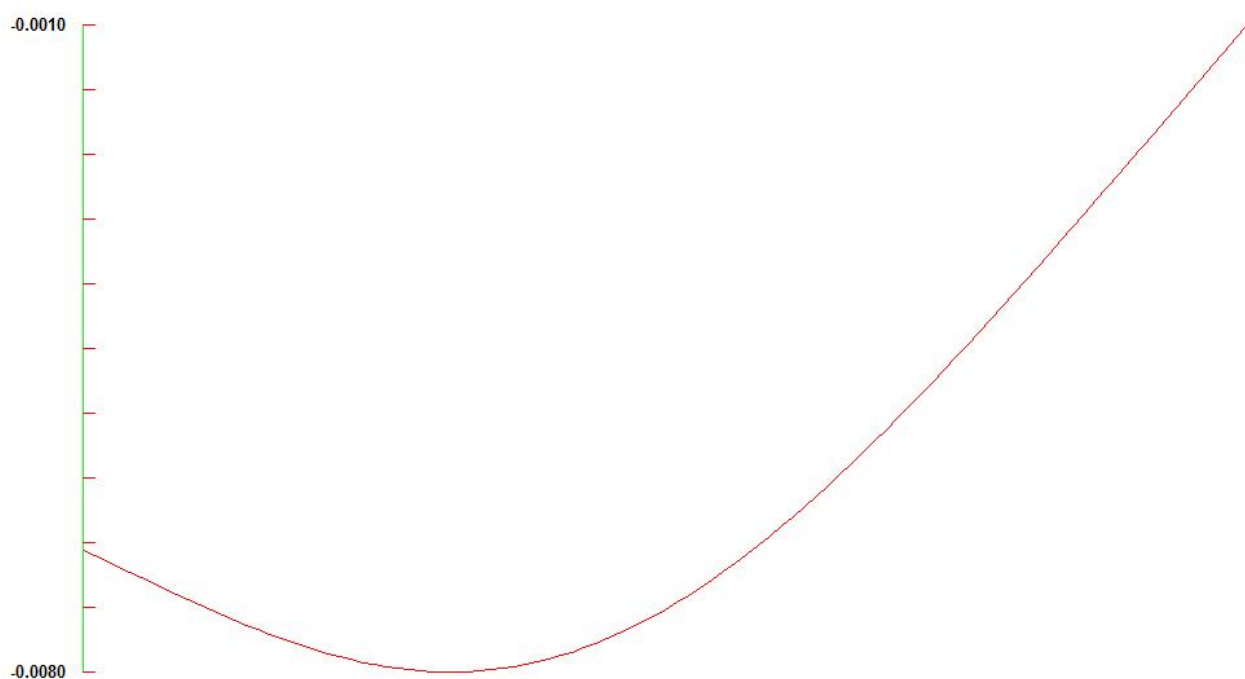


Рис.4

Наконец, на Рис.5 приведена эпюра изгибающих моментов также для момента времени, когда нагрузка расположена точно в центре балки ( $x=L/2$ ).

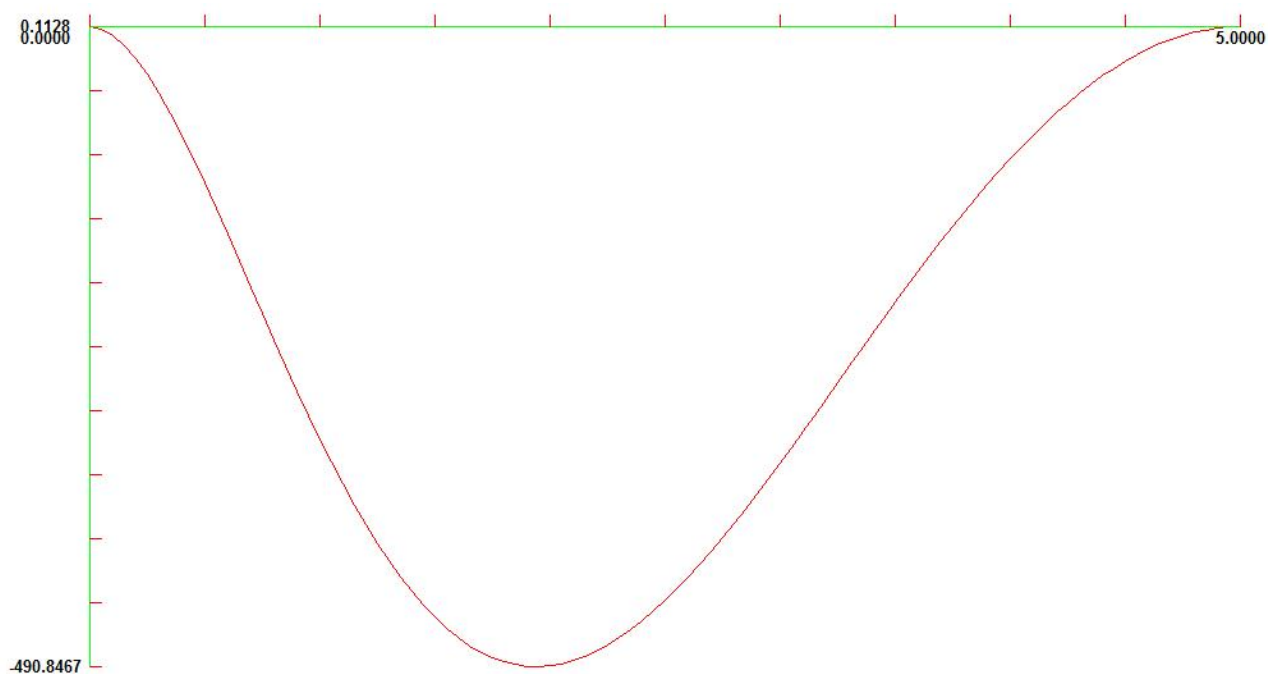


Рис.5