

Расчёт многопролётной балки на статические нагрузки

Рассмотрим балку, имеющую произвольное количество опор и нагрузку в виде нескольких сосредоточенных сил и нескольких погонных нагрузок, равномерно распределённых на ограниченных участках. Внешние изгибающие моменты не рассматриваем, поскольку они не представляют большого практического интереса. Впрочем, добавление их не усложняет сколько-нибудь существенно рассматриваемую задачу. Дифференциальное уравнение изгиба балки имеет вид:

$$EJ \frac{d^4 w}{dx^4} = \sum P_i \delta(x - a_i) + \sum q_i [u(x - b_{i1}) - u(x - b_{i2})] - \sum R_i \delta(x - c_i) \dots \dots \dots (1)$$

Здесь EJ — жёсткость балки (произведение модуля упругости её материала на момент инерции поперечного сечения)

w — прогиб балки;

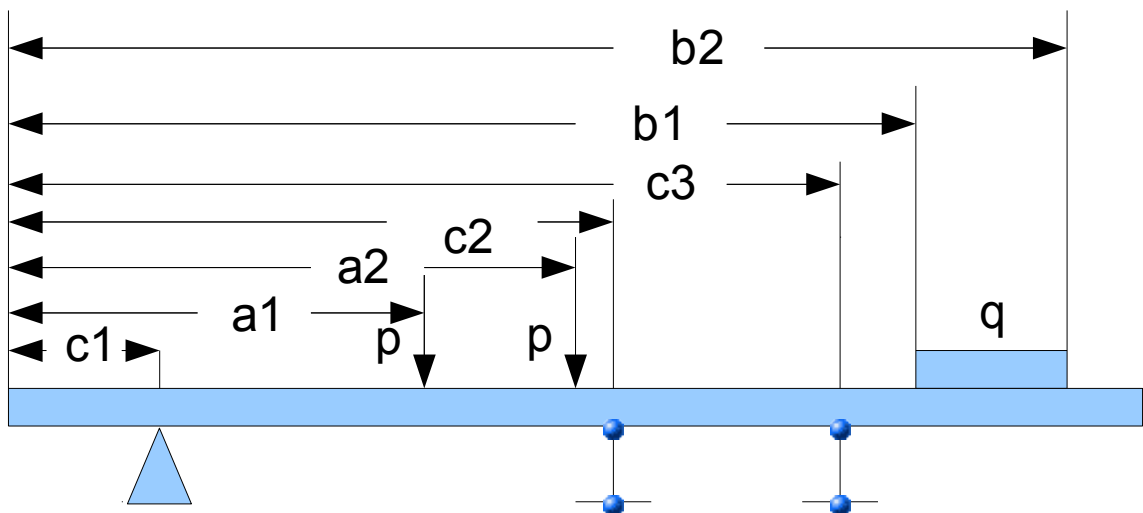
x — координата вдоль оси балки с началом на левом конце;

R — реакции опор;

$\delta(x)$ — функция Дирака;

$u(x)$ — единичная функция.

Остальные обозначения показаны на рисунке.



Выполним в (1) преобразование Лапласа:

$$EJ r^4 \bar{w}(r) = EJ \left[r^3 w(0) + r^2 \frac{dw(0)}{dx} + r \frac{d^2 w(0)}{dx^2} + \frac{d^3 w(0)}{dx^3} \right] + \sum P_i \exp(-ra_i) + \sum q_i \frac{\exp(-rb_{i1}) - \exp(-rb_{i2})}{r} - \sum R_i \exp(-rc_i) \dots \dots \dots (2)$$

Если на левом конце балки изгибающие моменты и поперечные силы равны нулю (конец свободен), то будем иметь:

$$\frac{d^2 w(0)}{dx^2} = \frac{d^3 w(0)}{dx^3} = 0 \dots \dots \dots (3)$$

Выполним в (2) обратное преобразование Лапласа:

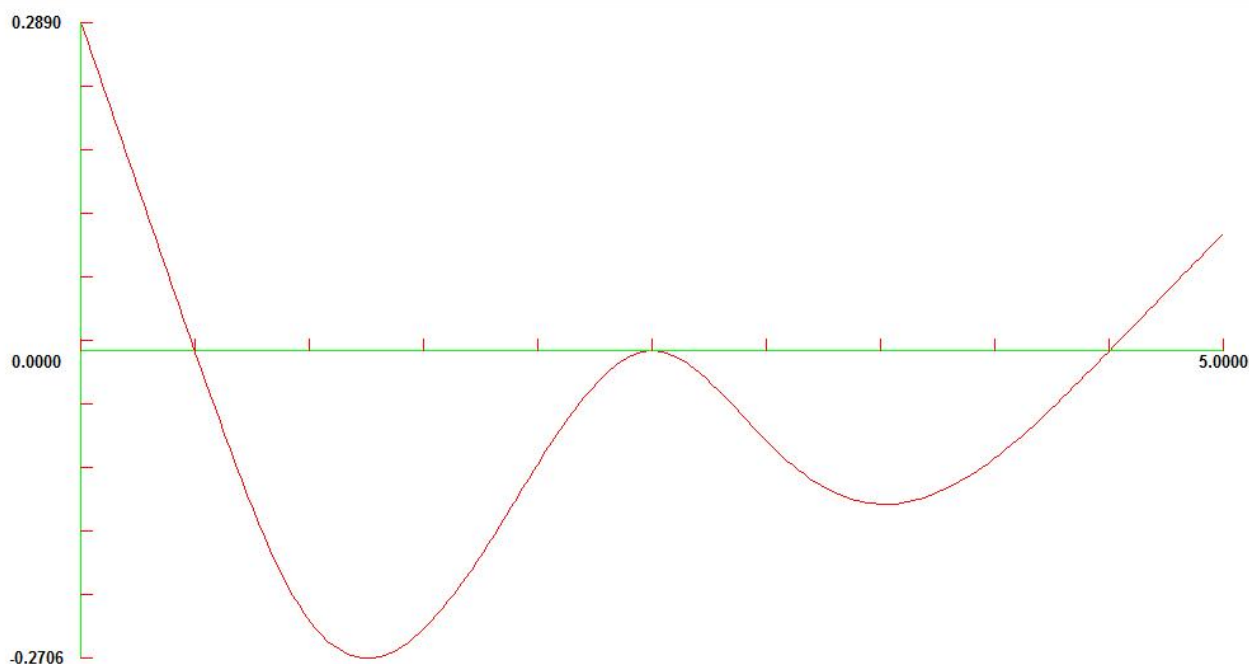
$$w(x) = w(0) + x \frac{dw(0)}{dx} + \frac{1}{6EJ} \sum P_i (x - a_i)^3 u(x - a_i) + \frac{1}{24EJ} \sum q_i [(x - b_{i1})^4 u(x - b_{i1}) - (x - b_{i2})^4 u(x - b_{i2})] - \frac{1}{6EJ} \sum R_i (x - c_i)^3 u(x - c_i) \dots \dots \dots (4)$$

В формуле (4) неизвестными являются реакции опор R_i и два граничных условия. Для определения неизвестных получим систему уравнений из условий $w(c_i) = 0$, к которым надо добавить условия статического равновесия:

$$\sum R_i = \sum P_i + \sum q_i (b_{i2} - b_{i1})$$

$$\sum R_i c_i = \sum P_i a_i + \sum q_i \frac{b_{i1}^2 - b_{i2}^2}{2}$$

Найденные в результате решения системы уравнений неизвестные подставляем в формулу (4) и вычисляем осадки балки. Результат расчёта по программе, написанной на Ruby на рисунке (для наглядности $w(x)$ — с обратным знаком):



Исходные данные были приняты такие:

$L = 5\text{ м}$ — длина балки, $EJ = 1000 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ — жёсткость балки.

Массив координат расположения опор c_i : $c = [0.5, 2.5, 4.5]$ м (три опоры)

Массив величин сосредоточенных нагрузок P и их координат a_i :

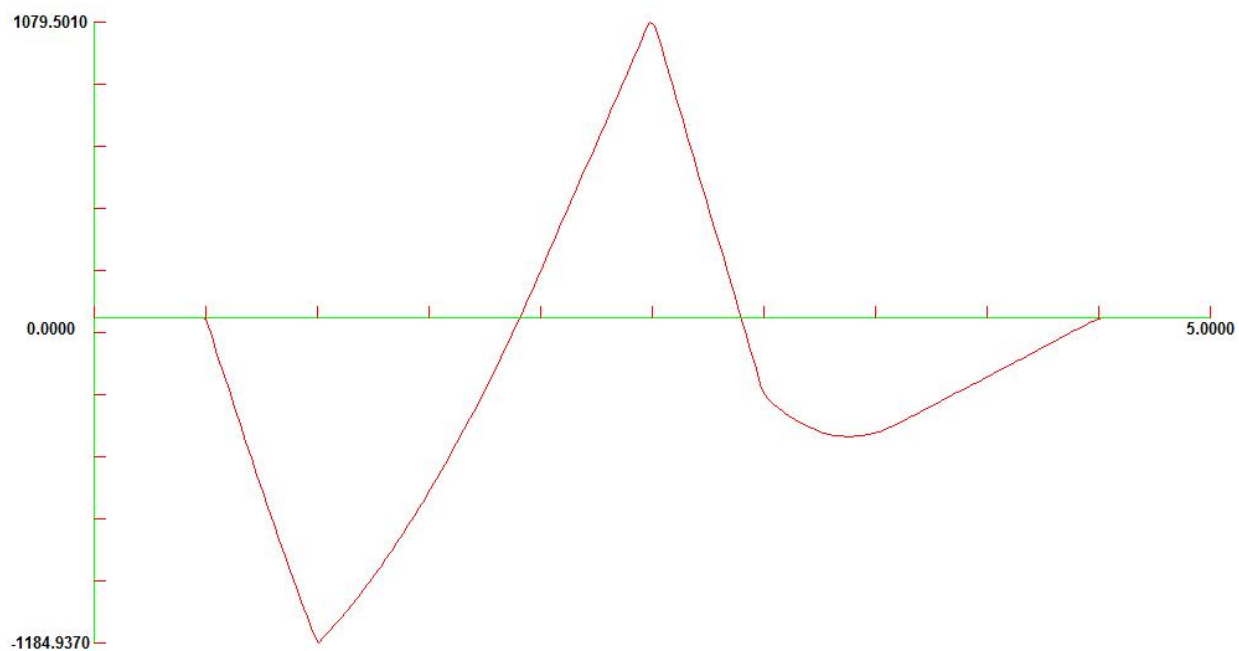
$p = [[3000, 1], [2000, 3]]$ (кг и м - две нагрузки),

Массив распределённых (погонных) нагрузок q и их координат b :

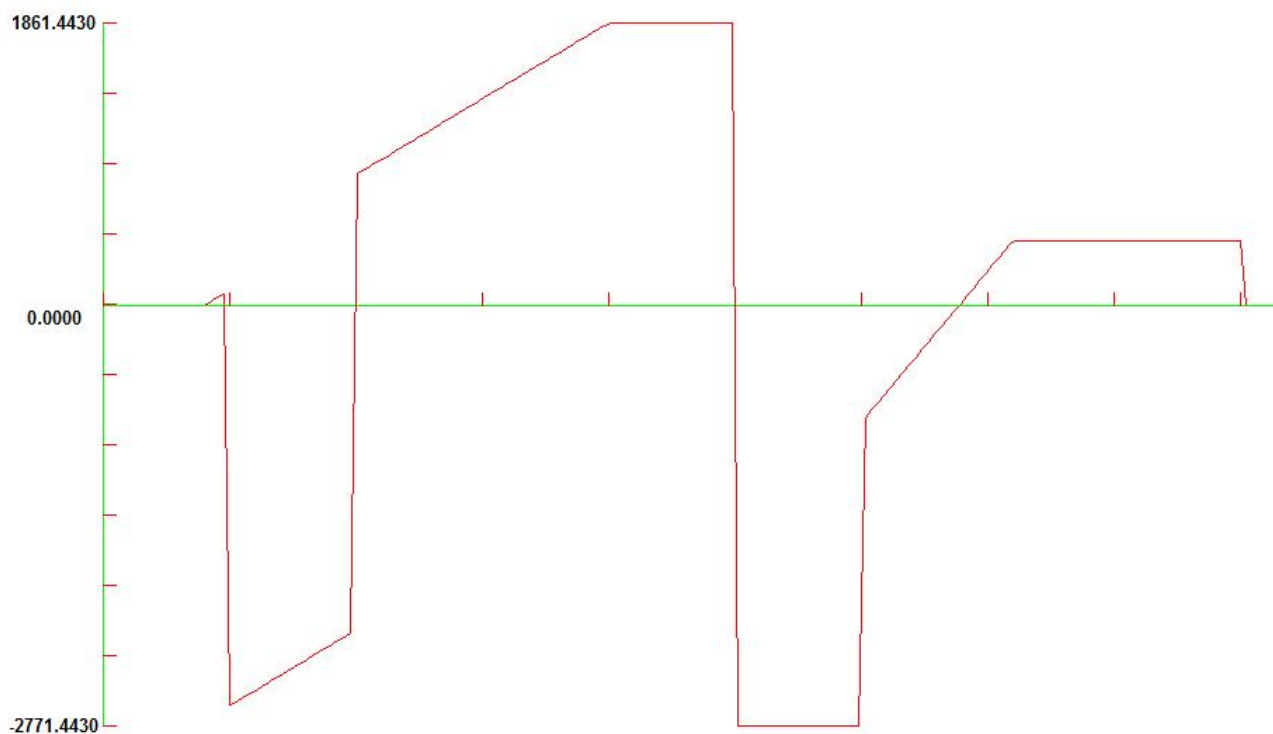
$q = [[1000, 0.4, 2], [2000, 3, 3.6]]$ (кг/м и м - две нагрузки)

(В программе `периг` — обозначено число равномерно расположенных точек, в которых выполняли расчёт.)

Вторая производная формулы (4), умноженная на EJ , даёт изгибающие моменты в балке — их эпюра на рисунке:



Умножая на EJ третью производную от $w(x)$, получим поперечные силы — их эпюра на следующем рисунке:



Реакции опор и начальные условия равны:

```
[2738.5570312499985, 4632.885937500003, 428.5570312499984, -0.2890492187499997, 0.5780901041666661]
```

Я не стал вводить в расчётную схему вариант заделки конца балки, поскольку лучше вместо этого на заделанном конце ввести несколько (две, три, или больше) шарнирных опор. Результат будет тот же, но при этом мы получим дополнительные данные, позволяющие судить о величине и распределении напряжений, создаваемых заделанным концом балки в материале самой стенки. Для проектирования конструкции такие сведения могут быть очень полезны.

При расчётах по данной программе, следует раскомментировать нужную из трёх строк: `graf y, wobratn;` `graf y, m;` или `graf y, r;` позволяющих получить рисунок соответствующей эпюры, а остальные две строки закомментировать (этот вариант программы не позволяет распечатать сразу все три эпюры). Полагаю, что если добавить к предлагаемой программе хороший графический интерфейс для удобства ввода исходных данных, она может быть полезной для практических расчётов. Программа вместе с пакетом всех вспомогательных модулей в запакованном файле размещена на моём сайте и может быть загружена для ознакомления и использования.