Расчёт взаимодействия летящего стержня при ударе о не деформируемую преграду

Выпишем снова общее решение дифференциального уравнения для продольных колебаний стержня (трансформанта Лапласа):

$$(r^2-a^2s^2)\ddot{U}(r,t)=r\dot{U}(0,s)+\frac{\partial\dot{U}(0,s)}{\partial x}-a^2s\dot{U}(r,0)-a^2\frac{\partial\dot{U}(r,0)}{\partial t}\text{............}(1)$$

Все обозначения прежние.
Рассмотрим стержень, летящий вдоль оси x, начало координат на заднем (свободном) конце. Нас интересует момент встречи с препятствием. Для свободного конца x=0 имеем:

$$\frac{\partial\dot{U}(0,s)}{\partial x}=0$$

Стержень в момент встречи не деформирован, следовательно:

$$\dot{U}(r,0)=0$$

Все точки стержня в момент удара имеют одинаковую скорость, которую обозначим V и тогда можем принять:

$$\frac{\partial\dot{U}(r,0)}{\partial t}=\frac{V}{r}$$

(Образ Лапласа для 1 по переменной x равен 1/r)
Переписываем формулу (1) с учётом всех этих условий

$$\ddot{U}(r,s)=\frac{1}{(r^2-a^2s^2)}[r\dot{U}(0,s)-\frac{a^2}{r}V]\quad\text{....................}(2)$$

Теперь выполним в (2) обратное преобразование Лапласа по x:

$$\dot{U}(x,s)=\dot{U}(0,s)ch(asx)-\frac{V}{s^2}[ch(asx)-1]\text{..................}(3)$$

Учитывая, что U(L,t) = 0 (преграда не деформируется), получим:

$$\dot{U}(0,s)=\frac{V}{s^2}\frac{ch(asL)-1}{ch(asL)}\text{.......................}(4)$$

Динамическую силу удара стержня о преграду обозначим P(t). На правом конце стержня x=L (здесь L — длина стержня) имеем:

$$\frac{\partial U(L,t)}{\partial x}=\frac{-1}{FE}P(t)\quad\text{......................}(5)$$

Продифференцируем по x выражение (3)

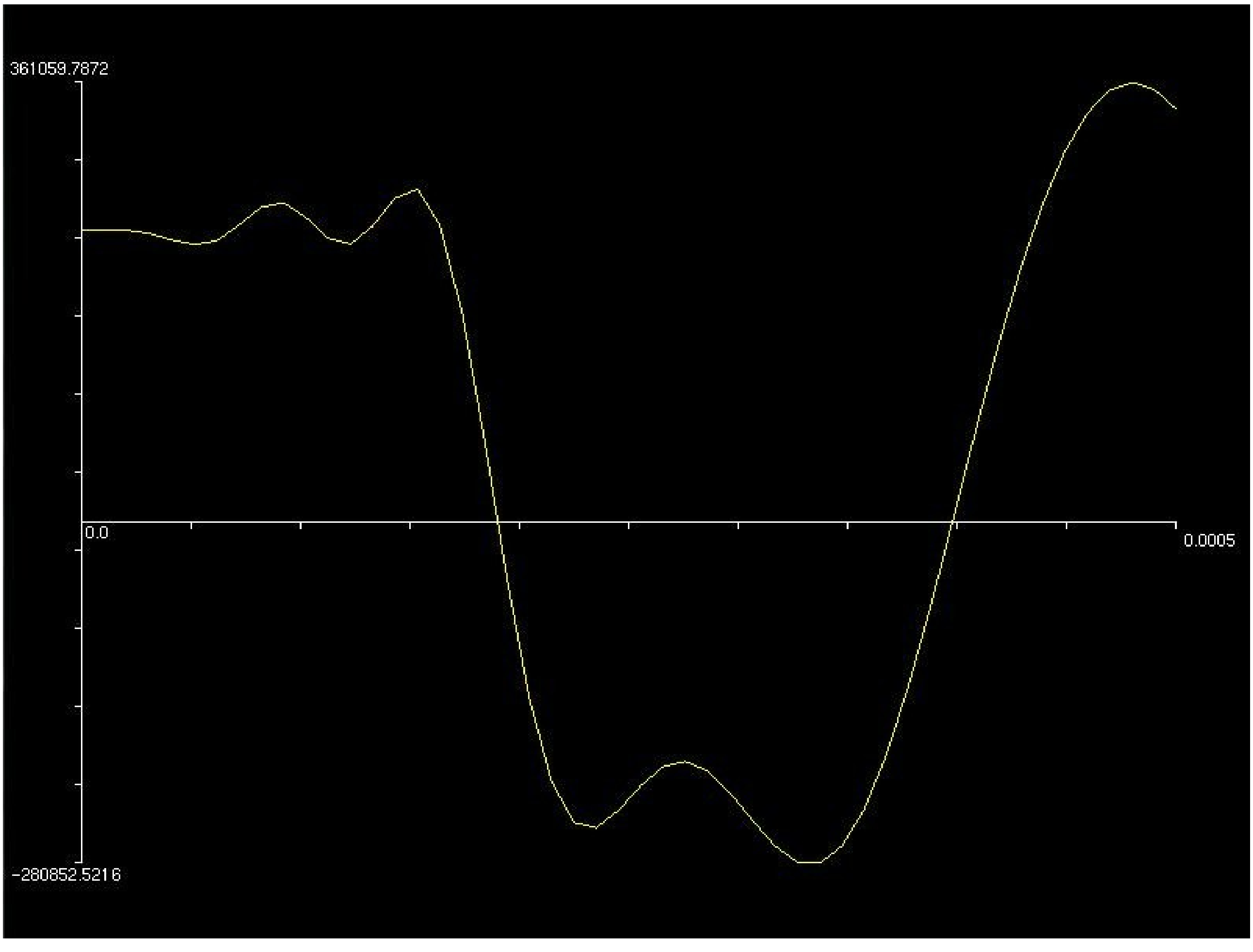
$$\frac{\partial \dot{U}(x,s)}{\partial x} = as\,\dot{U}(0,s)\,sh(asx) - \frac{aV}{s}\,sh(asx)\,............(6)$$

Учитывая (4), (5) и (6), получим:

$$\dot{P}(s) = \frac{aVE}{s}\,th(asL)\,.........................(7)$$

Приняв F=1, полагаем, что P(t) равномерно распределена по площади контакта. Теперь в (7) надо выполнить обратное преобразование с помощью моей программы (снова применяю третий вариант).

Для расчёта ударной нагрузки выбираю длину стержня L=0.5м, скорость полёта V=500 м/сек (приблизительно соответствует начальной скорости снаряда), все остальные исходные данные те же, что и в предыдущей задаче о колебаниях стержня. Результат расчёта на рисунке:



Здесь величина напряжения приведена к размерности кГ/см^2 .

Отмечу несколько интересных фактов:

1..Давление достигает максимума сразу в первый момент соприкосновения стержня с преградой и некоторое время существенно не меняется.

2..Расчёты со стержнями разной длины показали, что она влияет только на

время действия давления, но не на его величину.
3..Интерес представляет только кривая давления до наступления отрицательного значения, так как в действительности в этот момент происходит отскок стержня от препятствия. В данной постановке задачи считается, что стержень после касания намертво соединяется с преградой. Если бы было так в действительности, то в стержне в конечном итоге установились бы свободные колебания с резонансной частотой. Тот факт, что отрицательные напряжения почти равны положительным указывает, что стержень отскакивает от преграды с почти такой же скоростью, как и скорость удара.
4..В более строгой постановке следует учитывать податливость материала самой преграды (например, танковой брони), а также пластическое течение материала самого стержня, их влияние должно быть весьма заметным и приведёт к значительному уменьшению силы удара. Изменится и сама картина столкновения. Учёт этих факторов существенно усложняет задачу, впрочем, можно рассматривать различные приближённые схемы и, тем самым, приблизиться к реальной картине.

Пусть поверхность преграды упруго-податливая и справедливо соотношение:

$$U(L,t)=\frac{1}{KF}P(t)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

где K кГ/м^3 — коэффициент пропорциональности (коэффициент постели).
Подставляя (8) в (3) при x=L, найдём::

$$\dot{U}(0,s)=\frac{1}{KF}\frac{\dot{P}(s)}{ch(asL)}+\frac{V}{s^2}\frac{ch(asL)-1}{ch(asL)}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

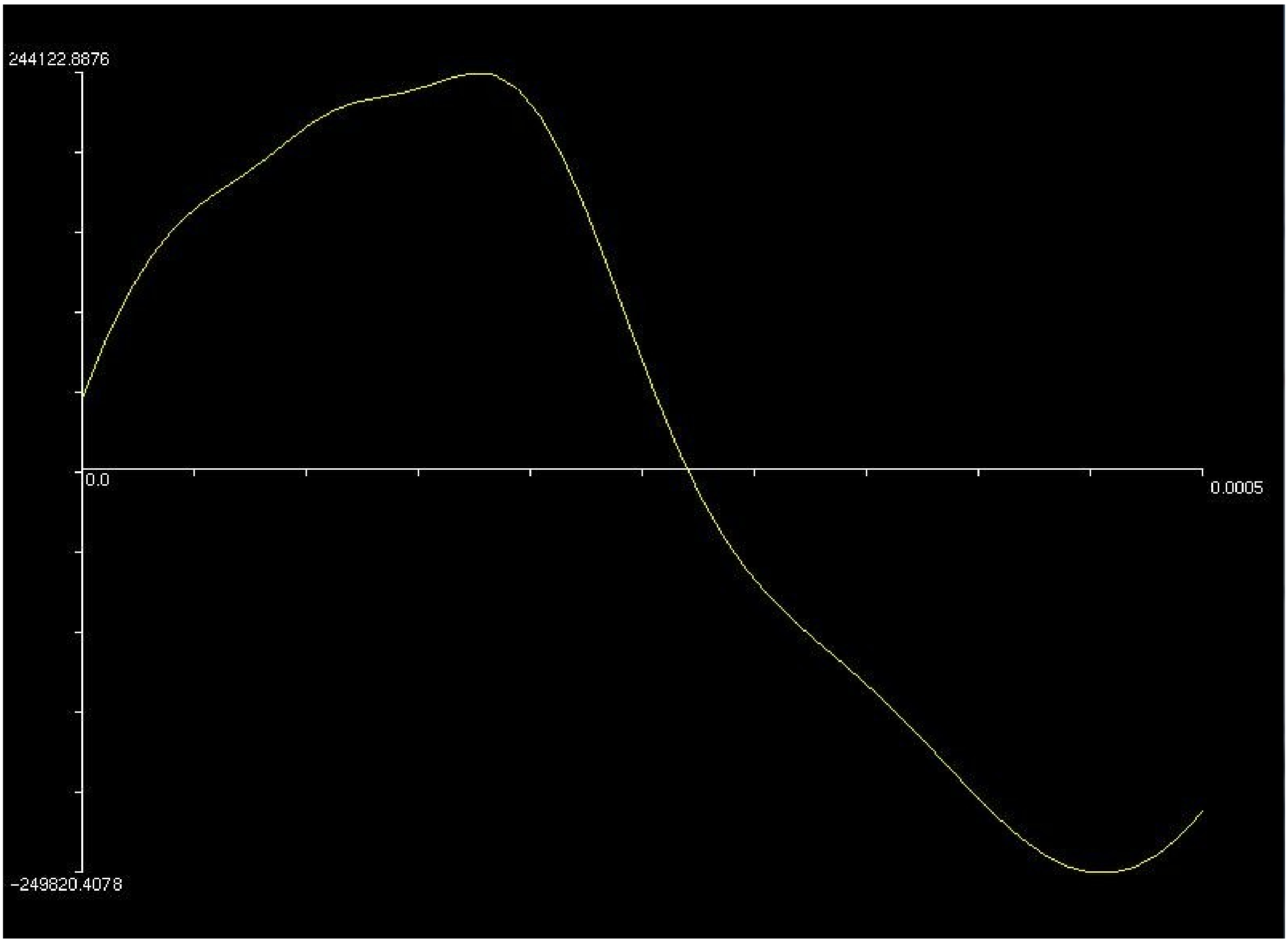
Подставляем (5) и (9) в (6), находим:

$$\frac{\dot{P}(s)}{F}=\frac{aV}{s}\frac{th(asL)}{\frac{1}{E}+\frac{as}{K}th(asL)}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

Коэффициент K определяется свойствами преграды, для его определения надо решить задачу о статическом давлении на поверхность преграды (например, на броню танка). Принимаю условно K=80000000000кГ/м^3 и выполняю численно обратное преобразование в (10). На рисунке - результат расчёта.

Как видим, картина кардинально изменилась. Значение для K я подобрал таким, чтобы влияние введённого фактора было заметным. При очень больших K (теоретически равных бесконечности) снова получаем тот же результат, что и в предыдущем случае. Меняя этот коэффициент, можно получать интересные и весьма различные результаты.

Самым существенным отличием является то, что теперь давление нарастает не скачком, а постепенно, начиная с нуля. Отмечу также, что максимальные значения давления остались того же порядка, но продолжительность их воздействия уменьшилась. Интересно было бы



посмотреть, что изменится, если свойства преграды нелинейны, то-есть прогиб её поверхности не пропорционален давлению. Нелинейность обуславливается пластическими свойствами материалов. Но для этого надо кардинально разбираться с задачей о воздействии больших давлений на поверхность преграды, то-есть рассматривать более конкретные случаи.